CÁLCULO (8/5/2014)

$\boxed{1}$ Dada $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-x^3+x^2(2y+1)+y^2(y+1)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Se pide:

a) Estudiar la continuidad de f.

- Si $(x,y)\neq(0,0) \Rightarrow f$ viene definida como una función racional, cuyo dominio es $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, y, por tanto, continua en su dominio (es cociente de funciones polinómicas).

- Si $(x,y)=(0,0)$, se trata de estudiar si existe y vale 1 el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{-x^3+2x^2y+y^3}{x^2+y^2} + 1 \right)$$

Estudiamos el límite cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ de la función $g(x,y) = \dfrac{-x^3+2x^2y+y^3}{x^2+y^2}$ pasando a coordenadas polares:

$$g(\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta) = \frac{1}{\rho^2}\left(-\rho^3\cos^3\theta + 2\rho^3\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta + \rho^3\text{sen}^3\theta\right)$$

$$= \rho\underbrace{(-\cos^3\theta, 2\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta + \text{sen}^3\theta)}_{\text{acotada}}$$

Luego

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$$

y, en consecuencia, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)+1 = 1 =$

$= f(0,0)$.

Por tanto, $\boxed{f \text{ es continua}}$ en $(0,0)$ y, en definitiva, $\boxed{\text{en } \mathbb{R}^2}$

b) Calcular las derivadas parciales de f en $(0,0)$.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x^3}{x^2}+1-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^3}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}(-1) = \boxed{-1}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)} = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{y^3}{y^2}+1-1}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{y^3}{y^3} = \lim_{y\to 0} 1 =$$

$$= \boxed{1}$$

c) Estudiar la diferenciabilidad de f

- Si $\boxed{(x,y) \neq (0,0),\ f \text{ es diferenciable en } (x,y)}$ pues toda función racional lo es en su dominio.
- Si $(x,y) \neq (0,0)$, debemos estudiar si existe y es 0 el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \left(f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)\right)}{\|(x,y)-(0,0)\|} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{-x^3+2x^2y+y^3}{x^2+y^2} + 1 - (1 - x + y)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x^3+2x^2y+y^3+(x^2+y^2)(x-y)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y+y^2x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Este límite no existe pues;

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x^2y+y^2x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x>0}} \frac{x^2y+y^2x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{x\to0^+} \frac{2x^3}{(2x^2)^{3/2}} = \lim_{x\to0^+} \frac{2x^3}{2\sqrt{2}\,|x|^3} =$$

$$\underset{|x|=x}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{x^3}{\sqrt{2}\cdot x^3} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Es decir, hemos encontrado dos subconjuntos tales que los límites de f relativos a cada subconjunto son distintos.

Por tanto, la función $\boxed{f \text{ no es diferenciable en } (0,0)}$.

2 Dado $f(x,y) = 80 - (x^2 + (y-1)^2)$, determine una ecuación del plano tangente a su gráfica en el punto $(1,0,78)$.

Una ecuación de dicho plano es:

$$z = f(1,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)(y-0)$$

Dado que $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2(y-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = -2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 2 \end{cases}$

y así:

$$z = 78 - 2(x-1) + 2y$$

ó $\boxed{z = -2x + 2y + 80}$ es una ecuación de dicho plano

Si f modeliza la altitud de una montaña de forma que el norte viene indicado por la dirección y sentido del vector $(0,1)$ y un montañero se encuentra en el lugar representado por el punto $(1,0,78)$, se quiere saber:

a) Qué dirección debe tomar para ascender hacia la cumbre por el camino más corto, y qué pendiente tiene la montaña en esa dirección.

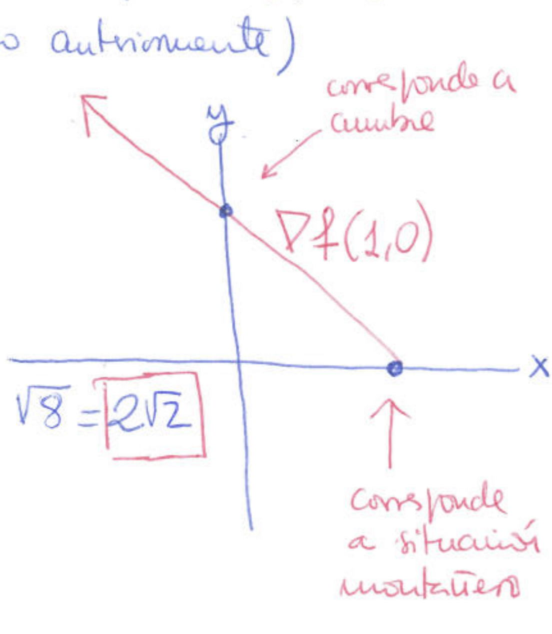
El camino más corto es el de pendiente máxima en cada punto del mismo, así el montañero debe considerar la dirección y sentido dados por el vector gradiente en el punto $(1,0)$:

$$\nabla f(1,0) = (-2,2) \quad \text{(hallado anteriormente)}$$

es decir, debe dirigirse hacia el

$\boxed{\text{NOROESTE}}$

La pendiente en el punto $(1,0,78)$ según esa dirección es:



$$f'\left((1,0); \frac{\nabla f(1,0)}{\|\nabla f(1,0)\|}\right) = \|\nabla f(1,0)\| = \sqrt{8} = \boxed{2\sqrt{2}}$$

b) Si asciende o desciende, y con qué razón, si desde ese mismo punto se mueve en dirección oeste.

La dirección oeste viene dada por el vector $(-1,0)$; así, como f es diferenciable en $(1,0)$ (de hecho, en $\mathbb{R}^2$) se tiene que la pendiente en ese punto según la dirección oeste es:

$$f'((1,0);(-1,0)) \overset{f \text{ dif. en } (1,0)}{=} \nabla f(1,0)\cdot(-1,0) = (-2,2)\cdot(-1,0) = \boxed{2}$$

Como dicha pendiente es positiva, el $\boxed{\text{montañero ascenderá}}$, y la razón de ascenso en ese punto es de 2m. en vertical por 1m en horizontal.

c) Qué dirección debe tomar para mantener la altitud.

La dirección debe ser perpendicular a $\nabla f(1,0)$, esto es,

$$(u,v)\cdot(-2,2) = 0 \iff -2u+2v=0 \iff u=v$$

Luego, la dirección pedida es la dada por la recta $u=v$. Así podría dirigirse hacia

el $\boxed{\text{NORESTE}}$ (dada por $(1,1)$)

ó $\boxed{\text{SUROESTE}}$ (dada por $(-1,-1)$)